www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, I étant un intervalle donné de $\mathbb{R}$, on note $(P_\theta)_{\theta \in I}$, une famille de probabilités sur un espace probabilisable donné $(\Omega, \mathscr{A})$. Les variables aléatoires X considérées sur $(\Omega, \mathscr{A})$ sont discrètes à valeurs dans une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$ (c'est le cas des deux premières parties) ou dans une partie finie de $\mathbb{N}^2$ (c'est le cas de la troisième partie) notée Im X. Pour toute variable aléatoire X, de ce type, $k \mapsto p(\theta, k)$ désigne la loi de probabilité de X dite « distribution de X sous $P_\theta$ »; elle est définie par $p(\theta, k) = P_\theta(X = k)$ pour tout entier $k$ de Im X et pour tout réel $\theta$ de I. Pour toute application $\Phi$ définie sur Im X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère, sous réserve éventuelle d'existence, l'espérance et la variance de $\Phi(X)$ :

$$E_\theta(\Phi(X)) = \sum_{k \in \mathrm{Im}X} p(\theta, k)\,\Phi(k), \qquad \sigma_\theta^2(\Phi(X)) = E_\theta[(\Phi(X) - E_\theta(\Phi(X))^2].$$

L'espace vectoriel de ces applications $\Phi$ étant noté F, on étudie quelques propriétés de l'application linéaire L qui associe à $\Phi$ la fonction $\theta \mapsto E_\theta(\Phi(X))$. En particulier $h$ étant une fonction définie sur I, on détermine toutes les fonctions $\Phi$ de F, quand elles existent, qui vérifient $L(\Phi) = h$. On détermine également, parmi de telles fonctions $\Phi$, une fonction $\Phi_0$ de F telle que $\sigma_\theta^2(\Phi_0(X)) \leqslant \sigma_\theta^2(\Phi(X))$ quel que soit $\theta$ élément de I.

Dans le cours du problème, on confondra polynôme et fonction polynomiale. Les première et deuxième parties sont assez largement indépendantes, la troisième partie utilise quelques résultats de la première.

## PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, $n$ est un entier fixé strictement supérieur à un et la variable aléatoire X prend les valeurs entières 0, 1, 2, ..., $n$. L'intervalle I est $]0, 1[$ et l'espace F est celui $F_n$ des applications $\Phi$ de $\{0, 1, 2, ..., n\}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne également par $\mathscr{P}_n$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ dont la base canonique est notée $(e_0, e_1, ..., e_n)$ [où l'on pose $e_j = x^j$ pour $j$ entier vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$].

### I.1. Isomorphisme entre $F_n$ et $\mathscr{P}_n$

À tout élément $\varphi$ de $\mathscr{P}_n$, on associe l'application $\Phi$ de $\{0, 1, 2, ..., n\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(i) = \varphi(i)$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n$. Montrer que cette application est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{P}_n$ sur l'espace vectoriel $F_n$. On désignera son inverse par J.

### I.2. Étude d'un premier exemple.

On suppose dans cette question que la distribution de X sous $P_\theta$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, \theta)$, autrement dit : $p(\theta, k) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$, pour tout $\theta \in I$ et pour tout $k = 0, 1, 2, ..., n$.

*a.* Montrer que les fonctions $\theta \mapsto p(\theta, k)$ sont polynomiales et que les polynômes associés constituent une base de $\mathscr{P}_n$.

*b.* Soit l'application linéaire $l$ définie dans $\mathscr{P}_n$ qui fait correspondre au polynôme $\varphi$ de $\mathscr{P}_n$ la fonction polynôme $\theta \mapsto E_\theta(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{n} p(\theta, k)\,\varphi(k)$. Montrer que le noyau de $l$ est réduit au polynôme nul et en déduire que $l$, considérée comme endomorphisme de $\mathscr{P}_n$, est bijective.

*c.* Montrer que l'application linéaire L de $F_n$ dans $\mathscr{P}_n$, qui associe à tout élément $\Phi$ de $F_n$ la fonction polynôme $\theta \mapsto E_\theta(\Phi(X))$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

*d.* À tout polynôme $\varphi$ de $\mathscr{P}_n$ écrit sous sa forme canonique $\varphi = \sum_{j=0}^{n} a_j e_j$, on associe le polynôme $\varphi^*$ défini par :

$$\varphi^*(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{n} + a_2 \frac{x(x-1)}{n(n-1)} + \ldots + a_n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

Calculer $e_j^*$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$.

Calculer ensuite $E_\theta(e_j^*(X))$ pour $j = 0, 1, 2$. (On pourra se servir éventuellement de l'expression de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale.)

Calculer enfin $E_\theta(e_j^*(X))$ pour $j$ quelconque compris entre 0 et $n$. (On pourra, par exemple, se servir de $(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k}$ et dériver $j$ fois par rapport à la variable $u$.)

En déduire, à l'aide de $\varphi$, l'expression de $E_\theta(\varphi^*(X))$ lorsque $\varphi$ est un élément quelconque de $\mathscr{P}_n$.

*e.* À l'aide de ce qui précède, expliciter l'application linéaire $L^{-1}$.

**Tournez la page S.V.P.**

**I.3. Étude d'un deuxième exemple.**

Soit $m$ un entier donné vérifiant $1 \leqslant m < n$. On suppose maintenant que les fonctions $\theta \longmapsto p(\theta, k)$, où $k$ prend les valeurs 0, 1, 2, ..., $n$, sont polynomiales et de degré inférieur ou égal à $m$. L'espace $F_n$ est toujours celui des applications $\Phi$ de $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{R}$.

*a.* Prouver que le noyau de l'endomorphisme $l$ de $\mathscr{P}_n$ défini précédemment n'est pas réduit à l'élément nul de $\mathscr{P}_n$. Comparer la dimension de Im $l$ à $m$.

*b.* Soit Q un élément de Im $l$ et soit $\varphi_0$ un polynôme de $\mathscr{P}_n$ tel que $l(\varphi_0) = Q$. Exprimer à l'aide de $\varphi_0$ et de Ker $l$ l'ensemble de toutes les solutions $\varphi$ de l'équation $l(\varphi) = Q$.

*c.* Le polynôme Q étant toujours supposé donné dans Im $l$, on suppose que $\varphi_0$, élément de $\mathscr{P}_n$, vérifie :

$$l(\varphi_0) = Q \qquad \text{et} \qquad \sigma_0^2(\varphi_0(X)) \leqslant \sigma_\theta^2(\varphi(X))$$

quel que soit $\theta$ dans I et quel que soit $\varphi$ vérifiant $l(\varphi) = Q$.

En utilisant les polynômes $\varphi = \varphi_0 + \alpha u$ où $\alpha$ est un réel arbitraire et $u$ un élément de Ker $l$, prouver que $E_0((\varphi_0 u)(X)) = 0$ quelque soit $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et quel que soit $u$ dans Ker $l$.

*d.* Réciproquement, on suppose que $\varphi_0$, élément de $\mathscr{P}_n$, vérifie :

$$\begin{cases} l(\varphi_0) = Q \\ E_0((\varphi_0 u)(X)) = 0 \text{ pour tout } u \text{ dans Ker } l \text{ et pour tout } \theta \text{ dans I.} \end{cases}$$

Prouver que $\varphi_0$ est solution du problème de minimisation : « $\sigma_\theta^2(\varphi_0(X)) \leqslant \sigma_\theta^2(\varphi(X))$ pour tout $\theta$ dans I et pour tout $\varphi$ élément de $\mathscr{P}_n$ vérifiant $l(\varphi) = Q$ ».

**I.4. Résolution du problème de minimisation dans un cas particulier.**

On suppose ici $n = 3$, les fonctions $p$ étant définies par : $p(\theta, 0) = p(\theta, 3) = \dfrac{\theta}{2}$ ; $p(\theta, 1) = p(\theta, 2) = \dfrac{1 - \theta}{2}$.

Dans cette question, les éléments $\Phi$ de $F_3$ sont représentés par les quadruplets $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ *de* $\mathbb{R}^4$ (où $a_0 = \Phi(0)$, $a_1 = \Phi(1)$, $a_2 = \Phi(2)$, $a_3 = \Phi(3)$), ce qui permet d'identifier les espaces vectoriels $F_3$ et $\mathbb{R}^4$. L'application linéaire L de $F_3$ dans $\mathscr{P}_3$ s'identifie alors à une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathscr{P}_3$.

*a.* Déterminer le noyau et l'image de L.

*b.* Définir tous les éléments de $\mathbb{R}^4$ dont l'image par L est la fonction polynôme $\theta \mapsto \theta$ sur I.

*c.* Déterminer, parmi les quadruplets précédents, celui, noté $\Phi_0$, tel que $E_\theta((\Phi_0 u)(X)) = 0$ pour tout élément $u$ dans Ker L et pour tout $\theta$ dans I. Énoncer la propriété de minimisation obtenue ainsi pour cet élément $\Phi_0$.

## DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie X est une variable aléatoire pouvant prendre toutes les valeurs entières, autrement dit : Im $X = \mathbb{N}$. On fera la convention $\theta^n = 1$ lorsque $\theta = n = 0$

**II.1. Préliminaires.**

Dans ce qui suit, on dira qu'une fonction $f$, définie sur $[0, R[$ où R est un nombre réel $> 0$ ou éventuellement $+\infty$, est développable en série entière sur $[0, R[$ s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $\geqslant R$ telle que, pour tout $x$ de $[0, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dans ces conditions, on prolonge la fonction $f$ par $\tilde{f}$ définie sur $]-R, +R[$ par $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

*a.* Soit $f$ développable en série entière sur $[0, R[$. Rappeler les propriétés de dérivabilité de $\tilde{f}$ sur $]-R, +R[$ et calculer les coefficients $a_n$ de la série entière à l'aide des dérivées successives de $\tilde{f}$ au point 0. En déduire l'unicité de la suite $(a_n)$ intervenant dans la définition de $f$ et donner l'expression de ces coefficients $a_n$ à l'aide des dérivées successives de $f$ au point 0.

*b.* Soit $g$ une fonction développable en série entière sur $[0, R[$. Montrer que la fonction $f$ définie par $f(t) = g(t)\, e^{-t}$ est développable en série entière sur $[0, R[$. On pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$; déterminer les coefficients $a_n$ à l'aide des dérivées successives de $f$ au point 0.

**Tournez la page S.V.P.**

II.2. On suppose dans cette question que $I = [0, +\infty[$, la distribution de X sous $P_\theta$ étant définie par $p(\theta, k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$ pour tout entier $k \geqslant 0$ et pour tout réel $\theta$ de $\mathbb{R}^+$.

Pour $\theta > 0$, X est donc une variable de Poisson de paramètre $\theta$. On désigne par $\mathscr{S}$ l'espace vectoriel des suites $s = (s(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s(n)}{n!} t^n$ de la variable $t$ soit de rayon de convergence infini. On désigne par $\Lambda$ l'application linéaire de $\mathscr{S}$ dans l'espace vectoriel des fonctions développables en série entière sur $[0, +\infty[$ qui associe à toute suite $s$ de $\mathscr{S}$ la fonction :

$$\theta \mapsto E_\theta(s(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(\theta, k)\, s(k).$$

*a.* Soit $f$ développable en série entière sur $[0, +\infty[$. Déterminer $s$, élément de $\mathscr{S}$, tel que $\Lambda(s) = f$.

*b.* En utilisant les propriétés de la loi de Poisson, trouver pour $r = 1$ et $r = 2$, les suites $s$ telles que $\Lambda(s)(\theta) = \theta^r$, pour tout $\theta$ de $\mathbb{R}^+$. En utilisant la question *a.* précédente, trouver également les suites $s$ telles que $\Lambda(s)(\theta) = \theta^r$, pour tout $\theta$ de $\mathbb{R}^+$, où $r$ est un entier positif quelconque.

II.3. On suppose encore $I = [0, +\infty[$. Soit $m$ un entier donné quelconque supérieur ou égal à 1. On suppose que la distribution de X sous $P_\theta$ est, pour tout $\theta \geqslant 0$, $p(\theta, k) = a(\theta)\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!\,k!}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

*a.* Rappeler le développement en série entière de $(1-x)^{-m}$ et en déduire l'expression de $a(\theta)$ pour tout $\theta \geqslant 0$.

*b.* On note $g_\theta$ la fonction génératrice de X sous $P_\theta$, c'est-à-dire $g_\theta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(\theta, k)\, z^k$ pour tout $z$ de l'intervalle $]-R(\theta), +R(\theta)[$ où $R(\theta)$ désigne le rayon de convergence de cette série entière. Déterminer $R(\theta)$. Déterminer explicitement $g_\theta(z)$ pour tout $z$ de $]-R(\theta), +R(\theta)[$ et en déduire les valeurs de $E_\theta(X)$ et de $\sigma_\theta^2(X)$ pour tout $\theta > 0$.

*c.* Soit S l'espace vectoriel des suites $s = (s(k))_{k \in \mathbb{N}}$ de réels telles que la série entière :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k-1)!}{k!}\, s(k)\, u^k$$

de la variable $u$ ait un rayon de convergence au moins égal à un. Soit $h$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}^+$ telle que, pour une telle suite $s$ de S, $h(\theta) = E_\theta(s(X))$, quel que soit $\theta \geqslant 0$. Montrer que, pour tout entier $n$, $s(n)$ peut s'obtenir comme une combinaison linéaire des dérivées successives de $h$ au point 0 (on ne demande pas d'expliciter ces combinaisons linéaires) et en déduire l'unicité de la suite $s$. À cet effet, on pourra utiliser la variable $u$ définie par $u = \frac{\theta}{1+\theta}$.

II.4. On suppose toujours $I = [0, +\infty[$ et que, pour tout $\theta \geqslant 0$, $p(\theta, 2n) = p(\theta, 2n+1) = \frac{e^{-\theta}}{2}\frac{\theta^n}{n!}$.

On désigne par $\mathscr{S}^*$ l'espace vectoriel des suites $s = (s(n))_{n \geqslant 0}$ de réels telles que pour tout entier $n$, on ait $|s(n)| \leqslant K\, 2^n$ où K est un nombre réel indépendant de $n$.

*a.* Montrer que $\mathscr{S}^*$ est inclus dans $\mathscr{S}$. Prouver également que si $s$ est dans $\mathscr{S}^*$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}\left[(s(2n))^2 + (s(2n+1))^2\right]$ est de rayon de convergence infini et en déduire que $\sigma_\theta^2(s(X))$ existe pour une telle suite $s$.

*b.* Soit $\Lambda$ l'application linéaire de $\mathscr{S}^*$ dans l'espace des fonctions développables en série entière dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour toute suite $s$ de $\mathscr{S}^*$, $\Lambda(s)$ est la fonction définie par $\Lambda(s)(\theta) = E_\theta(s(X))$. Déterminer le noyau de $\Lambda$.

**Tournez la page S.V.P.**

*c.* Soit $g$ une fonction telle que $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ dans $\mathbb{R}^+$ et telle que, pour tout entier $k$, $|g^{(k)}(0)| \leqslant K_1$ où $K_1$ est un réel positif indépendant de $k$. Déterminer une suite $s_1$ de $\mathscr{S}^*$ vérifiant $s_1(2n+1) = 0$ pour tout $n$ et telle que $E_\theta(s_1(X)) = g(\theta)$ quel que soit $\theta \geqslant 0$. Déterminer ensuite toutes les suites $s$ de $\mathscr{S}^*$ vérifiant cette dernière égalité.

*d.* La fonction $g$ étant supposée donnée, vérifiant les hypothèses précédentes, déterminer, parmi toutes les suites $s$ de $\mathscr{S}^*$ vérifiant $E_\theta(s(X)) = g(\theta)$ quel que soit $\theta \geqslant 0$, celle $s_0$ qui assure $\sigma_\theta^2(s_0(X)) \leqslant \sigma_\theta^2(s(X))$ pour tout $\theta \geqslant 0$. À cet effet, on utilisera des arguments analogues à ceux de I.3.

## TROISIÈME PARTIE

Cette partie est consacrée à l'étude d'un cas particulier où X est à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, n\}^2$, les variables marginales $X_1$ et $X_2$ de X étant binomiales de paramètres $n$ et $\theta$ (où $n$ est un entier strictement positif donné et $\theta$ un élément de $I = ]0, 1[$). On suppose aussi l'indépendance de $X_1$ et $X_2$ sous $P_\theta$ d'où résulte la relation :

$$P_\theta(X = (k_1, k_2)) = P_\theta(X_1 = k_1) P_\theta(X_2 = k_2) = C_n^{k_1} \theta^{k_1} (1-\theta)^{n-k_1} C_n^{k_2} \theta^{k_2} (1-\theta)^{n-k_2}.$$

### III.1. Préliminaire.

Soient $m$ un entier donné $\geqslant 1$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ un élément donné de $\mathbb{R}^m$, non nul. On désigne par $\lambda_\alpha$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\lambda_\alpha(x) = \lambda_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$.

*a.* Montrer que le noyau $H_\alpha$ de $\lambda_\alpha$ est de dimension $m-1$, et que $\mathbb{R}^m = H_\alpha \oplus \mathbb{R}\alpha$, où $\mathbb{R}\alpha$ est le sous-espace engendré par l'élément $\alpha$.

*b.* Un élément $\beta$ de $\mathbb{R}^m$ étant donné, montrer que $\sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = 0$ quel que soit $x$ élément de $H_\alpha$ si et seulement s'il existe un réel K tel que $\beta = K\alpha$. Pour la condition nécessaire on pourra décomposer $\beta$ sous la forme $\gamma + K\alpha$ où $\gamma \in H_\alpha$.

### III.2. Étude d'une minimation de la variance.

Soit $\mathscr{F}_n$ l'espace des applications de $\{0, 1, 2, \ldots, n\}^2$ dans $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathscr{L}$ l'application linéaire de $\mathscr{F}_n$ dans $\mathscr{P}_{2n}$ qui, à $\psi$ élément de $\mathscr{F}_n$ fait correspondre la fonction polynôme $E_\theta(\psi(X))$. On désigne toujours par L l'application linéaire de $F_{2n}$ dans $\mathscr{P}_{2n}$ de la partie I (I.2.*d*). Ayant posé : $a_{k_1,k_2} = \dfrac{C_n^{k_1} C_n^{k_2}}{C_{2n}^{k_1+k_2}}$, on définit également les applications linéaires de $\mathscr{F}_n$ dans $\mathbb{R}$, notées $\mu_k$, où $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, telles que $\mu_k(\psi) = \sum_{k_1+k_2=k} a_{k_1,k_2} \psi(k_1, k_2)$.

On dit que $\psi$ est $s$-constante si, quel que soit $(k_1, k_2) \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}^2$, $\psi(k_1, k_2)$ ne dépend que de $k = k_1 + k_2$. Sous cette condition : $\mu_k(\psi) = \psi(0, k) \sum_{k_1+k_2=k} a_{k_1,k_2}$.

*a.* Soit $\psi$ un élément de $\mathscr{F}_n$, montrer qu'il existe un élément unique $\Phi$ de $F_{2n}$ tel que $\mathscr{L}(\psi) = L(\Phi)$. Exprimer $\phi(k)$ à l'aide de $\mu_k$ et de $\psi$.

*b.* Exprimer à l'aide de $\mu_k$ et de $\psi$ l'appartenance de $\psi$ à $\operatorname{Ker}\mathscr{L}$.

*c.* Soit Q un polynôme donné de $\mathscr{P}_{2n}$. Exprimer à l'aide des $\mu_k$ et de $\psi$ la propriété $\mathscr{L}(\psi) = Q$.

*d.* Soit $\psi_0$ un élément de $\mathscr{F}_n$ tel que $E_\theta((\psi_0 u)(X)) = 0$ pour tout $u$ de $\operatorname{Ker}\mathscr{L}$. Montrer, en utilisant le préliminaire et des applications $\lambda_\alpha$ convenables que $\psi_0$ est $s$-constante.

*e.* Soit Q un polynôme donné de $\mathscr{P}_{2n}$, déterminer $\psi_0$ dans $\mathscr{F}_n$ vérifiant $\mathscr{L}(\psi_0) = Q$ et tel que, pour tout élément $\psi$ de $\mathscr{F}_n$ solution de $\mathscr{L}(\psi) = Q$, on ait : $\sigma_\theta^2(\psi_0(X)) \leqslant \sigma_\theta^2(\psi(X))$, pour tout $\theta \in I$.

Résoudre effectivement le problème pour $Q(\theta) = \theta$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail